数理する子供たち

第一話　チャーハンをこぼさずに混ぜたい

アンドウワタル

https://www.watando.com

2020年9月30日公開

2020年10月27日更新

１．プロローグ

「テツぅ、あんたまた赤点取ったんだって？」
　左手をブレザーのポケットに突っ込んで、携帯電話に目を向けたままアカネが問いかけた。
「あ、赤点？…いや、まず定義をはっきりしてもらわないと」
「はあ？40 点以下のテスト成績のことでしょ。そんなことは周知の事実なんだよ、この高校ではな！」
　アカネはテツのほうへ向き直り、語気を強めた。しかしテツも負けじと言い返す。
「ちがうね。おれが言ってるのはそういうことじゃないんだ。そもそもおれは最終成績だけ見れば赤点の科目などない。なぜなら再試験というものがあって、それをおれは毎回…」
「バーーーーーカ！まぬけ！これで６回連続じゃん。やったね」
「やったね。じゃねーんだよ。どこに喜ぶ要素があるんだよ。サディストかよ。加虐に快楽を感じるタイプなのかよ」
「来年、テツがクラスにいなくても誰も気にしないよっ！」
「息を吐くようにサディズムを吐くなよ」
　放課後の教室に二人の会話が弾んでいた。中間テストが終わって一週間、殺伐とした空気は安堵に変わり、学校内ではこのような試験結果の話題で持ちきりだった。
「いやー、でもほんとうに留年して卒業もできなかったらさあ、おれは中華料理屋でも開こうと思ってるんだよね」
　テツはぽつりと呟いた。
「…今度は漫画？それとも映画？」
「アニメ」
「ばかだなー」
　テツはすぐに影響される。今は、料理人の頂点を目指して旅をする中国の少年を描いた某アニメにどっぷりはまっているようだ。
「だけど問題が一つだけあるんだよな」
　と、テツは言った。

「ええと、問題が一つしか見つからないあんたの頭が一番問題な気がするけど、まあいいや。いちおう聞いておこうか」
「チャーハンを作るとき、フライパンをぶん回して混ぜるじゃん？あのとき、どうしてもこぼれちゃうんだよね」
「ちっさ！問題のスケールちっさ！こりゃ店出すってレベルじゃねえぞ！」
「だからおれはさ、チャーハンをこぼさずに混ぜたいんだよ」

チャーハンをこぼさずに混ぜたい

2. 具材の飛び上がる軌道

「練習あるのみだね。はい、解決」

アカネは興味を無くしたように再び携帯電話をいじり出した。

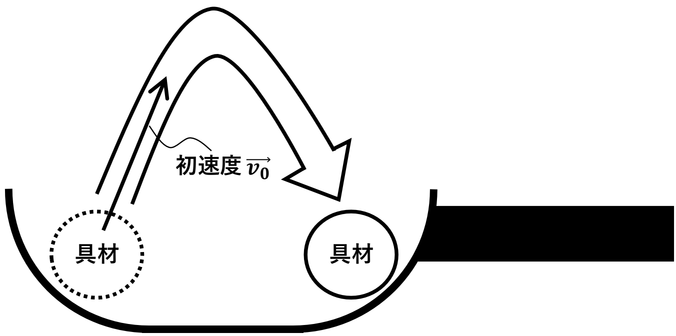
「ばかやろう！それでも勉強クラブメンバーかよ！…ちくしょう、失望したぜ…おれたちだけの最適解を見つけるんじゃなかったのかよ！」

彼らは学校非公式の勉強クラブというグループに所属している。メンバーは四人と小規模だが、校内掲示板にて宣伝を行い全校に周知されており、放課後の二年一組の教室で活動することをクラス担任によって黙認されている。雑談でその日が終わることも多いが、たまに日常の物事を研究する。今日はメンバーの二人が図書委員で不在である。

「うーん、それもそうだね。じゃあまずは“こぼさない”ってどういうことか考えるところから始めますか」

アカネは携帯電話を机の上におき、鞄からノートとシャープペンシルを取り出すと、ノートの真ん中にフライパンの絵を描き出した。

「フライパンをぶん回すと、こんなふうに具材がぴょーんって飛び上がるよね。それが全部、元のフライパンに戻ってくれば、“こぼさない”ってことだね。すごく簡単なモデルで表すと、具材のカタマリが初速度ベクトル$\overrightarrow{v_0}$の方向に飛び上がって、重力により放物線を描いてフライパンの領域に着地する、と」



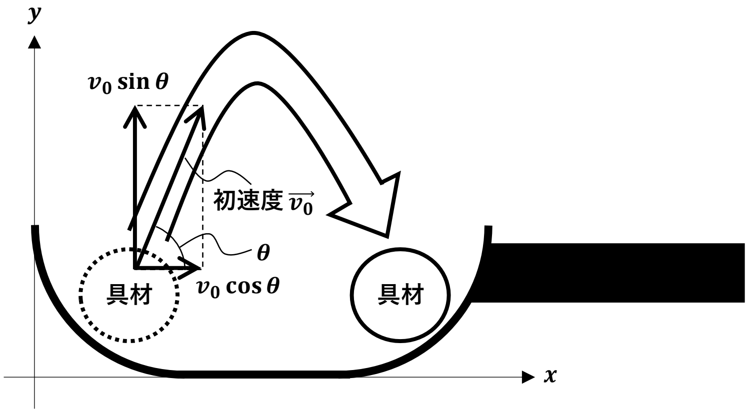
簡単なモデル

「テツ、この放物線ってどういう式だっけ？」
「えーっと、高校物理でいう投射の問題っぽいな。検索したらこんなのが出たぞ」

$$x = v_0 \cos\theta \cdot t$$
$$y = v_0 \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$

「ふむふむ、θは初速度ベクトルの角度で、tは時間だね。水平方向は初速度ベクトルの水平成分による等速直線運動で、鉛直方向は初速度の鉛直成分から落下速度を引いた運動で考えるのか」
　アカネは式を眺めながら独り言のように呟いた。
「ん？どっちも時間の関数だから、水平位置に対する鉛直位置の式にまとめられるんじゃね？」
　と、テツは言った。
「ふむふむふむ！やってみたまえ」
　テツはささっとノートに式を書き連ねると、フライパンの絵にx軸とy軸を付け加えた。

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\theta}$$
$$y = v_0 \sin\theta \cdot \frac{x}{v_0 \cos\theta} - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0 \cos\theta}\right)^2$$
$$y = \frac{v_0}{v_0} \cdot \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \cdot x - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0 \cos\theta}\right)^2$$
$$y = \tan\theta \cdot x - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0 \cos\theta}\right)^2$$



テツがいろいろ付け加えたモデル

「数学的になってきたねえ。ん？もしかしてこの初速度ベクトルが決まれば軌道も決まる？」

　アカネはテツに問いかけた。

「アカネ、その通りだよ。数式でいうとv_0とθが軌道を決めている。そんでもってコイツらはフライパンのぶん回し加減のパラメータだ」

「つまり具材がぶん回しで加速されて、フライパンからリリースされるときの終端速度と終端角度が軌道を決める、てことか。そしてその軌道上にフライパンを持ってくればこぼさない」

　二人は無言で頷く。

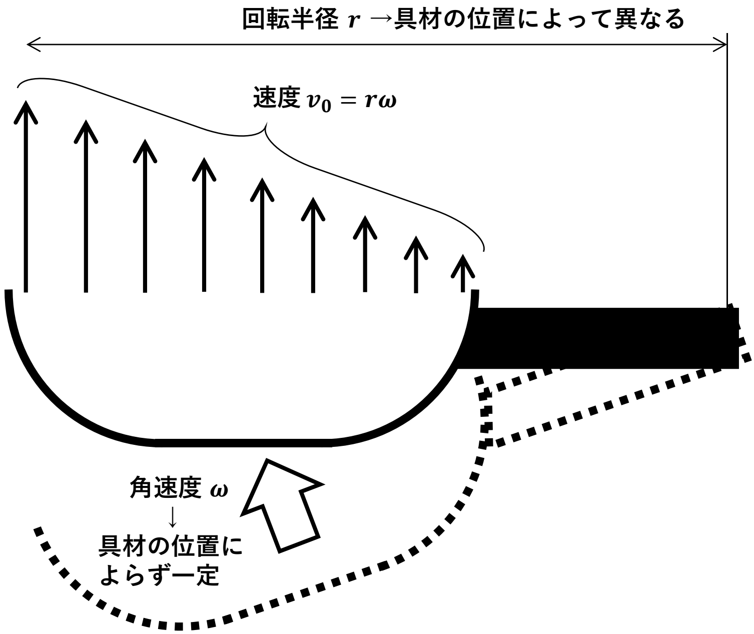
「フライパンをぶん回すのが上手いということは、この終端速度と終端角度の制御が上手いということなのか？よし、パラメータを振って条件を…」

「ちょっと待って、テツ。ぶん回しは手首のあたりを中心とした回転運動だよね」

　と言いながら、アカネはフライパンを持ってぶん回す真似をする。

「回転半径をrとすれば、具材の位置によってこのrが異なるよね。これってもしかして速度も異なるってことにならない？」

「あ、そうか！質点の速度は角速度ωと回転半径rの積だから、具材の質点がフライパンの上で分布していると考えれば、飛び上がる速度もこんな感じに分布するのか」

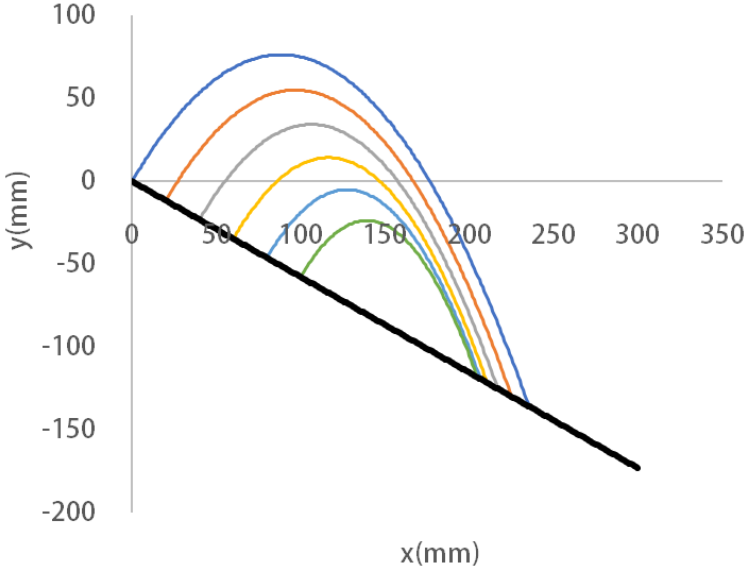


具材の速度分布

「そうすると軌道はどうなる？」
　アカネの問いかけにテツは黙り込む。
「…アカネさんよう、それにはクレバーな電子計算機が必要ですぜ。手計算でやろうなんて……おれにはとても無理だ！」
「あっそ」
　と口をついて出る前に、すでにアカネは自前のノートパソコンを鞄から取り出していた。テツが手計算を嫌がるのはいつものことなのだ。

「よーし、ちゃちゃっとエクセルに打ち込むよ！θはとりあえず 60°に固定して、いろんな条件で試してみよう」

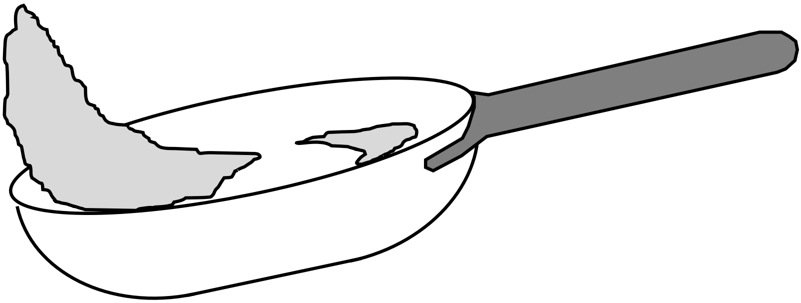
　カタカタと派手に音を鳴らしてキーボードやらタッチパッドを操作し、アカネはあっという間に軌道のグラフを作り上げた。



フライパンの終端角度 60°のときの具材の軌道(角速度ω=1.5π)

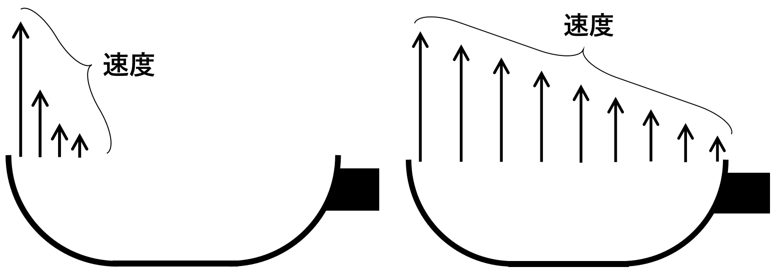
「おお！それっぽい！ネットでシェフの料理動画を見つけたから見てみよう。答え合わせだ」

　二人はテツの携帯電話の画面を覗き込んだ。フライパンを振って挽肉や細かな野菜を混ぜる様子が高画質の動画で鮮明に映し出された。



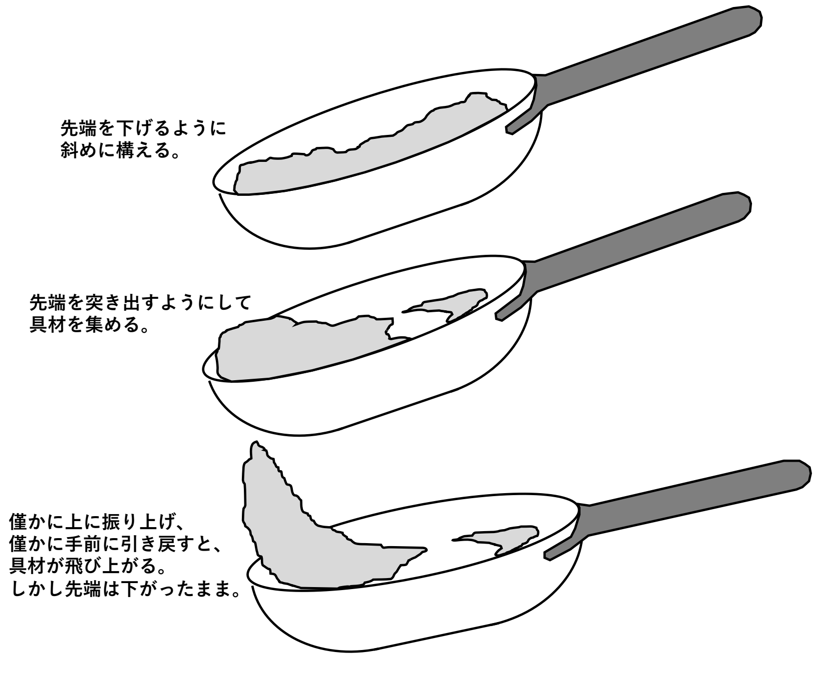
フライパンを振って挽肉や細かな野菜を混ぜる様子

「…なんか、違うな。どう思う？アカネ」
「フライパンの先端の方にある具材は大きく飛び上がるけれど、先端から離れるにつれて飛び上がりは急激に小さくなっているね。あたしたちの考えたモデルだと、飛び上がる初速度は回転半径rの１次関数だから、こんなふうに急激な変化はしないんだ」
　解説しながら、アカネは実際の飛び上がりとモデルの飛び上がりを比較する図を描いてみせた。



実際の飛び上がり(左)とアカネたちのモデルの飛び上がり(右)

テツもノートに図を描きつつ話し始めた。
「それにさ、このフライパンの振り方を見ろよ。最初、先端を下げるように斜めに構えて、フライパンの面と平行に先端に向かって突き出すように動かしているだろ。これは具材を先端に集めているように見える。そして先端を僅かに上に振り上げて、僅かに手前に引き戻すと、具材が飛び上がる。しかし驚いたことに先端は下がってフライパンは斜めのままだ。



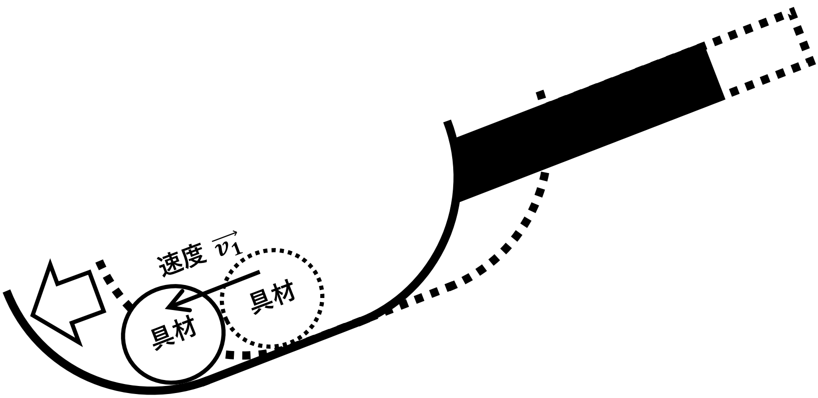
実際のフライパンの振り方

これらの事実をまとめると、飛び上がりの初速度は３つのベクトルの和になっているんじゃないかと思うんだ。すなわち、

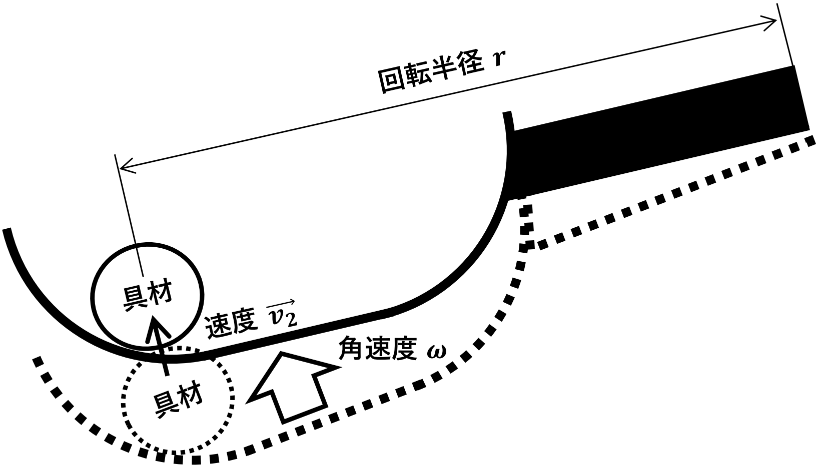
① フライパンの面と平行に先端に向かうベクトルと、へりに沿って方向を変えたベクトル

②　振り上げの回転運動によるベクトル
③　手前に引き戻す動作によるベクトル

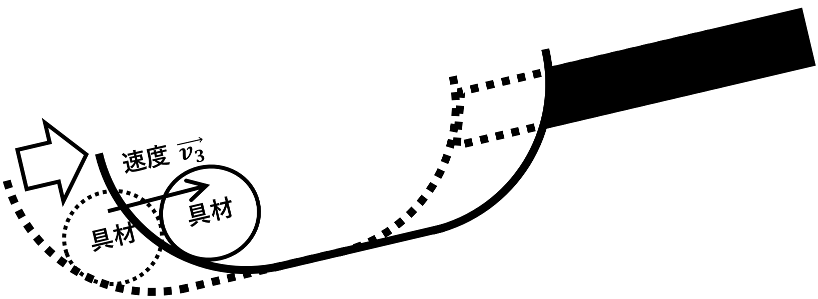
こいつらの和ということだ。
　あと、具材の動きをよく見ると、①と②の動作ではフライパンと一緒に動いていて、③でずるっと滑って飛び上がっているよね。これは①と②で具材に速度を与えて、③で減速方向にフライパンをごく短い時間で動かすことにより加速度aを具材に与えているんだと思う。具材の質量をm、重力加速度をg、フライパン表面と具材の摩擦係数をμとすれば、$ma > mg\mu$のときに具材がずるっと滑ることになる。まあ、要するに$a > g\mu$であれば滑るわけだ。このときフライパンのへりに具材があれば、③の動作で速度ベクトルが手前上を向いて飛び上がり、斜方投射の軌道を辿ることになる、じゃないかな？」



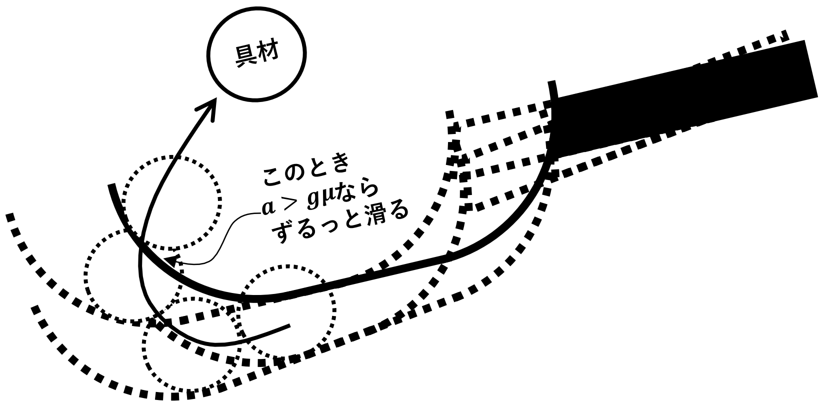
①の速度ベクトル



②の速度ベクトル



③の速度ベクトル



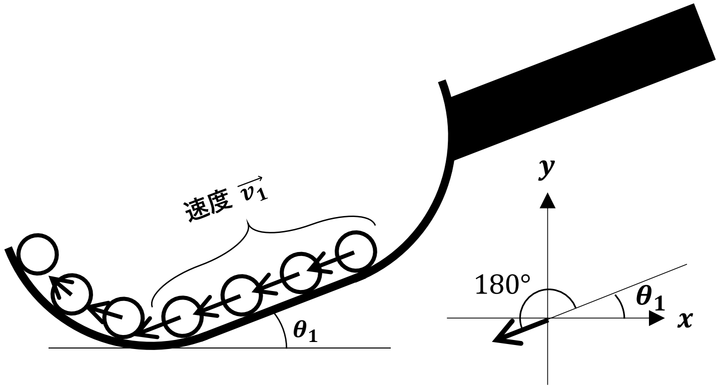
具材が飛び上がるまでの一連の流れ

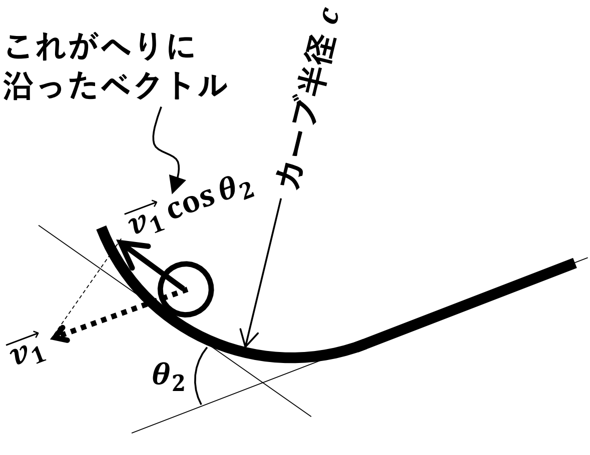
アカネは目を丸くして、少しの間、言葉が出なかった。
「テツ、あんたその冴えた頭をなんでテストに生かせられないかね」
ようやくアカネの口からこぼれると、テツはにやにやしながら腰に手を当ててこう言った。
「おれは実戦向きなのさ。学校のテストは“模範回答が趣味の優等生”に任せとけばいいんだ」
アカネはにっこり笑って、
「うん、実戦ですぐ死ぬやつのセリフだね」
と返した。

3．フライパンぶん回しモデル

「そんじゃー、ベクトルをぜんぶ足していきたいんだけど、その前に各ベクトルの大きさと向きを決めようか」
アカネが言うと、テツは先程の三つのベクトルの図にフライパンの角度やへりのカーブなどを書き込んだ。

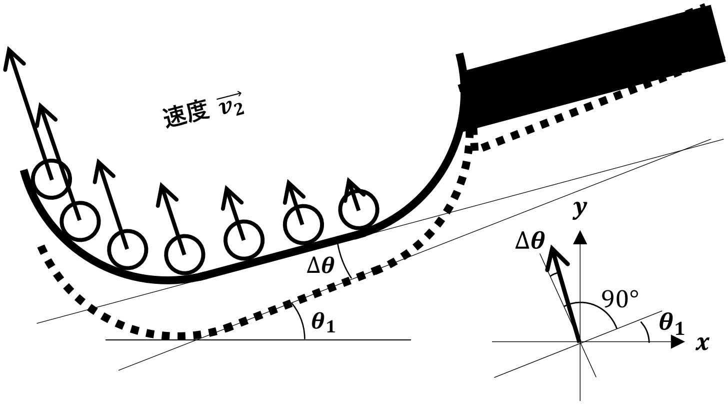
「最初のフライパンの角度をθ_1、ぶん回す角度を$\Delta\theta$、へりのカーブ半径をcとしよう。ベクトル①は、フライパンの底面ではv_1の速度で$180° + \theta_1$の方向を向いている。ただし具材はへりに沿って動くから、へりの角度をθ_2とすれば、へりに沿ったベクトル①の大きさは$v_1 \cos\theta_2$で表せる」
「なるほど、へりのカーブ半径cが大きいほどベクトル①は緩やかな変化になるんだね。そしてθ_2が 90° に近づくにつれてベクトル①は 0 に近づいていく、ということね」



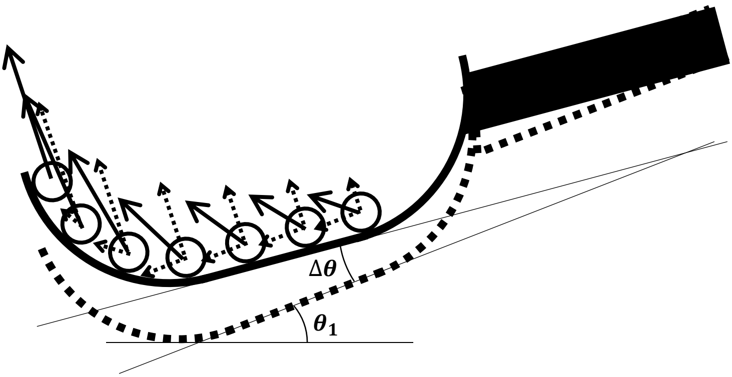


ベクトル①の全体(上)とカーブc詳細(下)

「ベクトル②は、角速度ωと回転半径rの積の速度で$90° + \theta_1 - \Delta\theta$の方向を向いている。これは最初の想定と同じだ」
「ベクトル①とベクトル②を合わせると、へりにある具材は上向きのベクトルで、底面にある具材はへりに向かうベクトルになる傾向が見てとれるね。うん、いいじゃん。これは直感に反していないと思うよ」



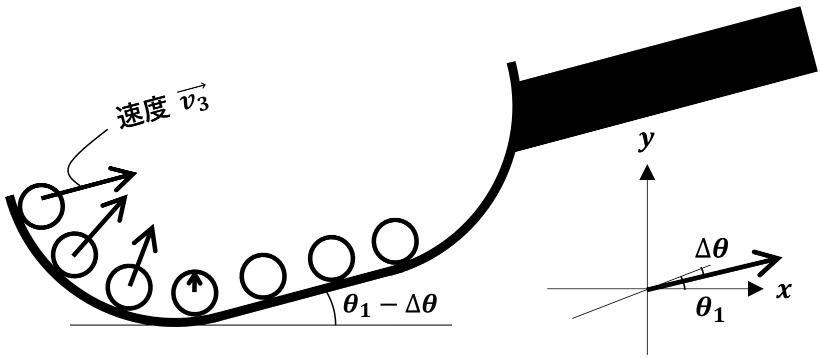
ベクトル②

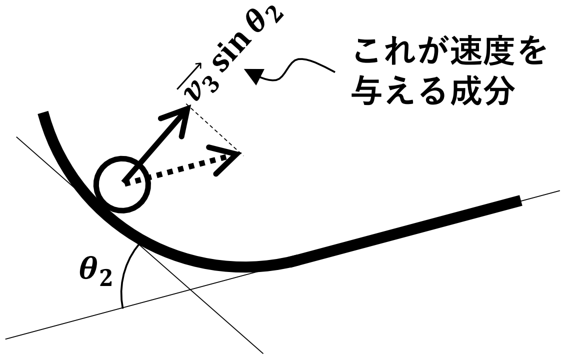


ベクトル①と②を合わせた図

「最後にベクトル③だが、$\theta_1-\Delta\theta$の方向にフライパンを動かすんだけど、さっき想定したとおり、うまくいくときは具材がフライパン表面をずるっと滑ると思うんだ。だからベクトル③のうち、表面に沿った成分は具材に速度を与えないと考えるべきじゃないかな」

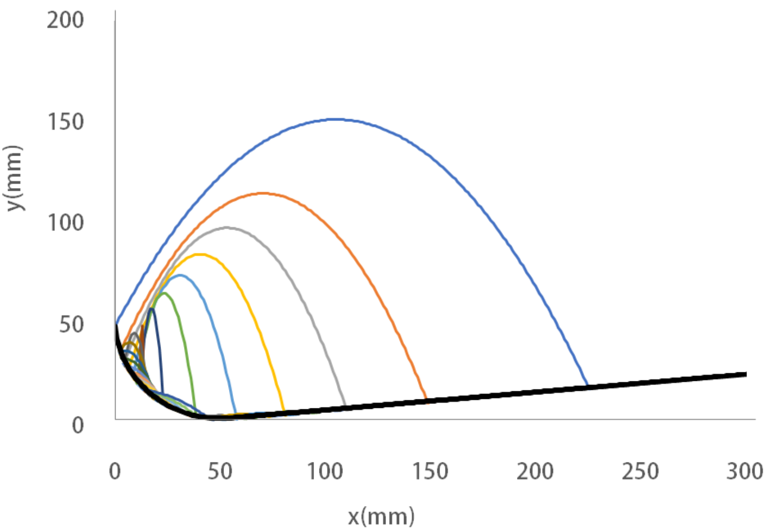
「そうだね。つまり、表面に垂直な成分が具材に速度を与える、と考えればいいよね。えっと、へりの角度はθ_2だから、$\theta_1-\Delta\theta$の方向にフライパンを動かす速度をv_3として、表面に垂直な成分は$v_3\sin\theta_2$と表せる。これをベクトル③とすれば、こんな感じかな？」



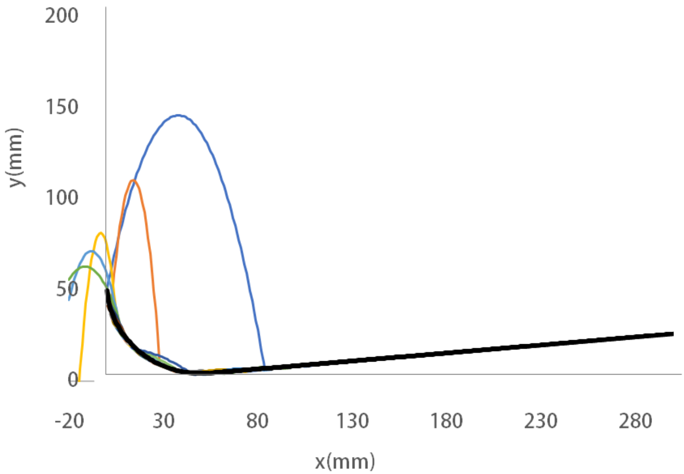


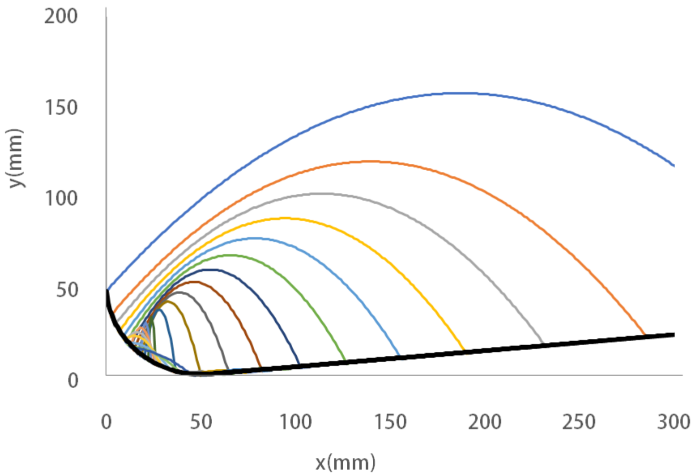
ベクトル③の全体(上)とカーブc詳細(下)

「さあ！あとはこの三種類のベクトルを足せばいいね！テツ、任意のx位置における水平成分と鉛直成分をそれぞれ計算して」
「へいへい、もちろんやってますとも。へりの角度をxの関数で表せばいいはずだから…」
　テツはノートに図や数式を書き込んで計算に取り掛かっていた。それを待つ間､アカネは具材の軌道を描くための準備をエクセルで進めることにした。しばしの沈黙の中、シャープペンシルとキーボードの心地よい音が耳を刺激し、まるで子供のように気持ちを昂らせた。
「…できたぞ。これで合ってるはず。アカネ、こいつをお前に託す。存分に打ち込んでくれ！」
「準備万端だよ。まかしといて！」
　僅か一分、打ち込まれた数式をもとに色鮮やかなグラフが描かれた。



フライパンぶん回しによる具材の軌道

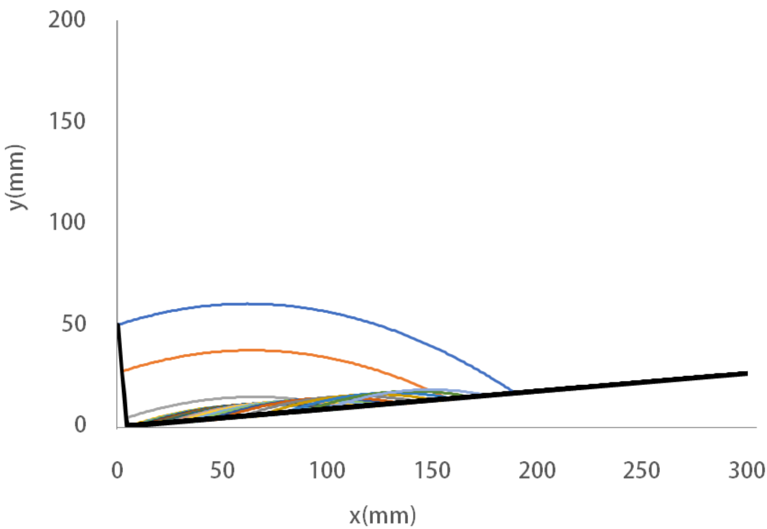




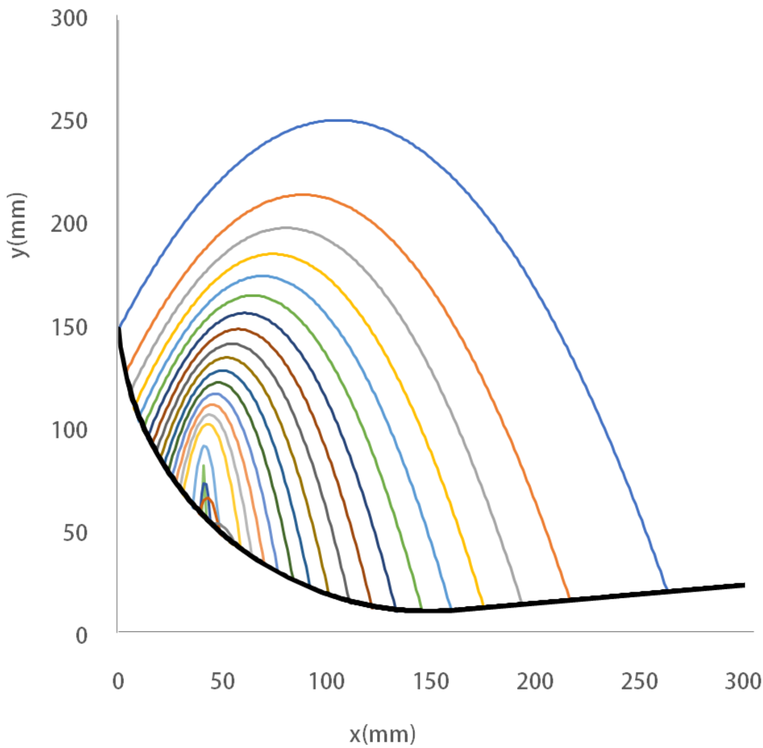
③が小さすぎる場合(上)と大きすぎる場合(下)

「うわ、やばいよこれ！最適解でたんじゃない？」
　アカネは興奮しながら言った。

「そうだな。③の動作の速度、つまり最後に手前に引く速度が小さすぎると具材が前方にぶっ飛ぶし、大きすぎると手元にぶっ飛んでうまくキャッチできない。ちょうどいい速度があるということをうまく示せた」
「あ！」
「なんだよ、アカネ」
「ちょっと待って、もしかしたら…」
　そう言ってグラフのパラメータをアカネが変更すると、新たなグラフパターンが画面に映し出された。



へりのカーブ半径cがゼロの場合



中華鍋のようにへりのカーブ半径cが極端に大きい場合

「やっぱり！へりのカーブが重要なんだよ！中華鍋は全面が大きなカーブになってるじゃん？これによって速度がうまい具合にグラデーションになって、具材を上手に飛び上がらせることができるんだよ」

嬉々とした顔でアカネはグラフを指さしながら言った。

「なるほど。つまりチャーハンをこぼさずに混ぜるには、中華鍋のようなできるだけ丸いフライパンを使って、①②③の動作で具材を飛び上がらせる。その際、①②から③に移行する加速度をフライパン表面の摩擦係数と重力加速度の積よりも大きくし、③は遅すぎず速すぎずちょうどいい速度範囲で行う、てことかな」

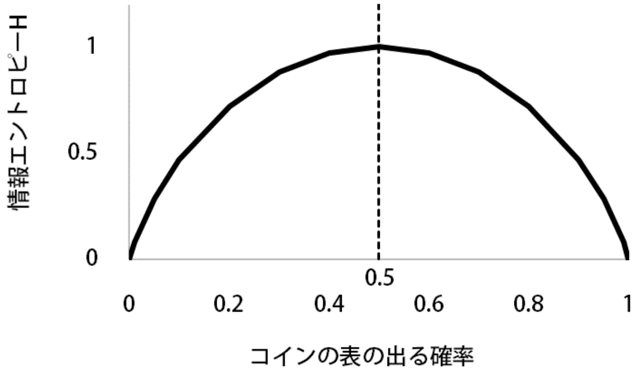
「それだわ。見つけちゃったよ最適解」
　二人は満足したように頷き合うと、テツは感慨深げにこう言った。
「はあー、中華鍋にそんな技術が詰まっていたなんて。今おれたちは中国四千年の数理を目の当たりにしているんだなあ」
「ちょっと何言ってんのかわかんないな」
　二人は堪え切れず吹き出した。達成感も相まって、妙な心地よさで満たされていた。ふと外を見れば、日も沈み僅かに薄暗くなっている。
「よし、きりもいいし、そろそろ帰りますか」
　テツはそう言ってすたすたと歩き出した。アカネもパソコンや筆記用具を鞄に詰めて、慌てて追いかけた。グラウンドからは運動部の活気のある声がまだ聞こえていた。

4．“混ざった”の定義

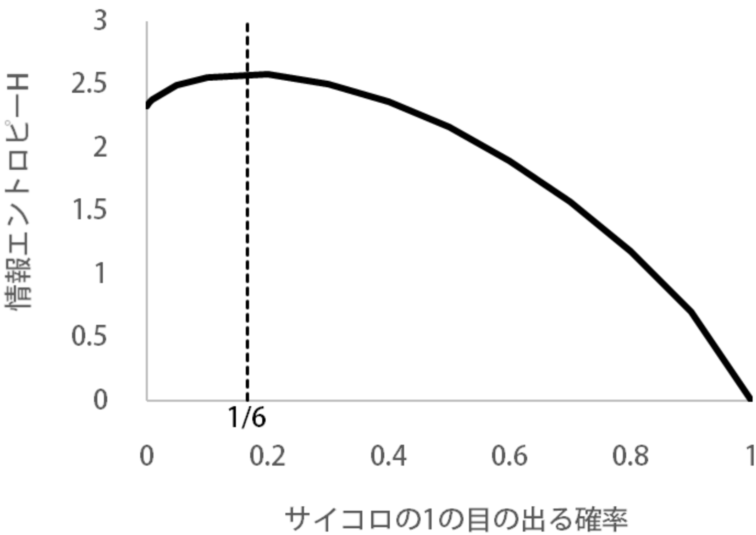
　次の日の昼休み、勉強クラブのメンバーであるクラスメイトのミキに、アカネは昨日のモデルについてさっそく説明した。得意げなアカネに対して、ミキはブルーのセルフレームの眼鏡をくいっと押し上げ、訝しげな顔をしてこう指摘した。
「おもしろいね。わくわくしちゃった！だけど惜しいなー、大事なことを忘れてる。テーマは“チャーハンをこぼさずに混ぜる”話だったでしょう？なのに“混ぜる”ことについて全然議論されてないよ」
「“混ぜる”？…え、フライパンを振れば混ざるんじゃ…」
「何回振ると混ざる？そもそもどういう状態を“混ざった”と定義する？」
　はっ、と気付いた様子でアカネは目を見開き、すぐにへにゃへにゃと椅子に崩れ落ちた。
「がーん。完璧だとおもったのにー、えーん」
「泣かないでー、アカネちゃん。でもこれをクリアすれば完璧になるかもしれないよ。ねえ、一緒に“混ぜる”を考えようよ！」
　ミキの訴えにアカネはゆっくりと体を起こし、
「まあ、それもそうだね。“混ざった”状態を定義するところから始めますか」

　と言って、先程まで説明に使っていたノートの次のページを捲った。アカネは続けて言う。
「たぶん、全ての具材が一様に分布していることを“混ざった”と言えると思うんだ。ただ、それを数学的にどう表現するか…」
「なんとなくエントロピーの概念に似てるね」
「あ、聞いたことある。たしか熱力学の話だっけ？」
「そう。はじまりは熱量と温度の関係から、不可逆性の度合いを表す指標として導入されたんだよね。そこから統計力学で乱雑さを表すという概念に拡張されて、情報理論とかいろいろな分野に広がっていったみたい」
「ふーん､適用できる分野が広いってことはかなり抽象的な概念なのかな？」
「そうだね、乱雑さと表現されることが多いけど、それってすごく抽象的だよね。もう少し具体的に言うと、ええと、情報理論では確率の対数として表してたと思うんだけど……忘れちゃった」
「ある事象が起こる確率をPとして、$-\log P$をその事象の持つ情報量という。つまり起こる確率の小さい事象ほど大きな情報量を持つことになる。n個の確率P_iの情報エントロピーHは、$H=-\sum_{i=1}^{n} P_i \log P_i$と表せる。log の底は 2 とする場合が多い、だってさ」
　アカネは携帯電話で検索した文章を読み上げた。
「それそれ！確率が 1 のとき､情報量は$-\log 1=0$になるんだよね｡つまり、何が起こるかわかっている事象は情報量を持たないってことだよね！コインを手から離したら落ちるってことはみんな知ってる、だから情報量はゼロ。逆に上に昇っていったらものすごく珍しい事象、だから情報量はすっごく大きくなる。うまいことできてるよねー」
　ミキは言い終わると、うんうん、と頷いた。アカネは少し考えて、何か閃いたようにこう言った。
「この情報エントロピーって、各事象の情報量を確率で重み付けして足し合わせるってことだよね。もしかして、これって期待値じゃない？」
「すごい！さすがアカネちゃんだね。そうなんです、情報エントロピーは情報量の期待値なんです」
「でもこれと乱雑さになんの関係があるの？」

「それは説明が難しいからちょっと置いといて、とりあえず例題いってみよう。コインを落として表が出るか裏が出るか当てるゲームです。情報エントロピーはいくつでしょう」
「いきなりだなー。ちょっと待ってね、計算するから」
　そう言って、アカネはノートに数式を書き出した。
「コインの裏表に差はないとすれば、どちらが出る確率も 1/2 だね。てことは、底を 2 として$H=-\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}\left(\log_2\frac{1}{2}+\log_2\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}\cdot 2\left(\log_2\frac{1}{2}\right)=-1(-1)=1$。コインの裏表を当てるゲームの情報エントロピーは 1 だ」
「正解！それじゃ今度はサイコロだよ。サイコロを振って出る目を当てるゲームの情報エントロピーは？」
「またあ？しょうがないなー。どの目も出る確率は 1/6 だね。つまり、$H=-\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{6}\log_2\frac{1}{6}=-\frac{1}{6}\cdot 6\left(\log_2\frac{1}{6}\right)\approx -1(-2.6)=2.6$。サイコロの目を当てるゲームの情報エントロピーは約 2.6 かな」
「お見事！」
　ミキは小さく拍手をした。
「今のは全ての事象の確率が均一だった場合だね。次に各事象の確率が均一じゃない場合を計算してみよう」
　そう言うと、今度はミキが手計算を行い、簡単なグラフをノートに描いてみせた。



コインの表が出る確率が 0 から 1 まで変動する場合



サイコロの 1 の目が出る確率が変動する場合のエントロピー

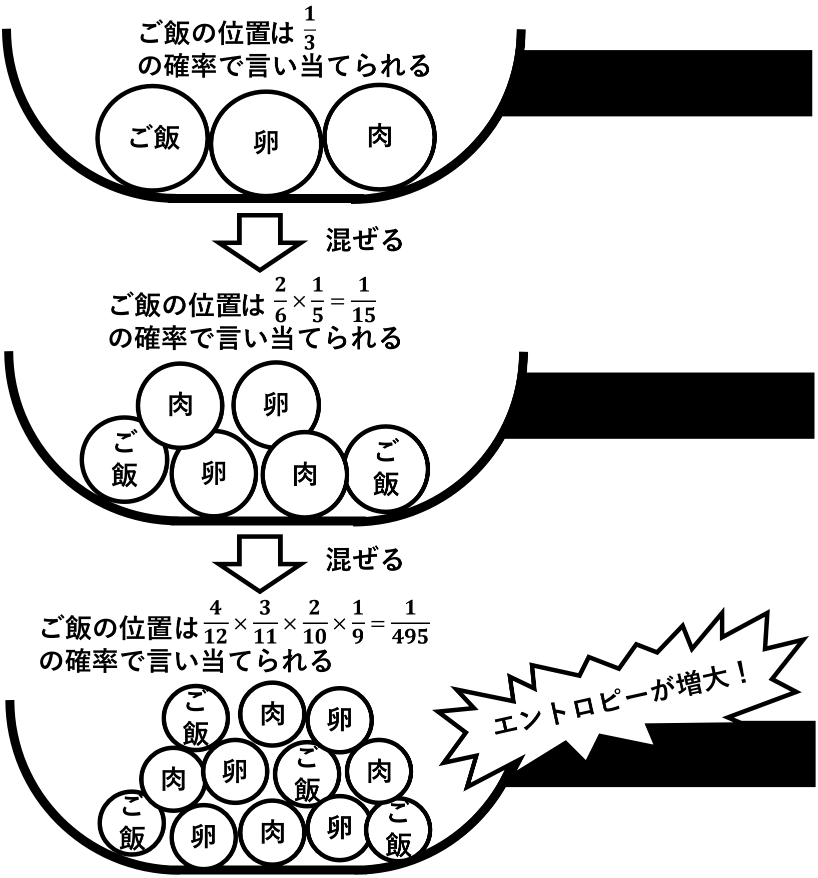
「どちらも各事象の確率が均一なときに情報エントロピーが最大になっているよね。しかも、サイコロのほうが大きい。つまり、各事象の確率が小さくて均一に含まれていると情報エントロピーは大きくなるのです」
「なるほど。コインと比べてサイコロは目の数が多いからね。各事象の確率が均一じゃない状態っていうのは…例えばイカサマのサイコロで１の目だけが極端に出やすくなっているとか、そういう状態かな。そっか、どうなるか予想しづらいものほど情報エントロピーが大きくなる、って考えていいのかな？」
「いいと思うよー。エントロピーが乱雑さを表すというのもなんとなく理解できるんじゃない？」
「ああ、そうだね。だから乱雑さなのか。イカサマで出る目に偏りがあったら乱雑じゃないもんね。あと全部の目が１だったら、必ず１が出るからこれも乱雑じゃないよね。異なる事象がたくさん均一に含まれるものほど情報エントロピーが大きいとも言えるね……あれ？異なる事象がたくさん均一に…全ての具材が一様に…てことは……あー！！」
　突然の大声にクラスの何人かがアカネの方を振り向いた。
「繋がった…！チャーハンに繋がったよ！」
「どういうこと？」
「ちょっと待ってね。順番に説明するから」
　アカネは一呼吸置き、ノートに図を描きつつ話し始めた。
「チャーハンの具材をフライパンに入れてまだ混ぜていないとき、種類ごとに具材の山が分かれているから、ある具材――例えばご飯はその山の中の一つであると予想できる。つまり、ざっくり言えば$\frac{1}{種類の数}$の確率で具材の位置を言い当てられるんだ。しかし混ざっているときは、ご飯がどの位置にあるのかを予想するのは難しい。混ぜると山が細かく分割されるから、たくさんある山の中から全てのご飯の山を言い当てるのは至難の業だよね。
　そして最大限混ざった状態というのは、山の分割が最も細かくなった状態と言える。つまり、具材の一粒一粒にまで分割された状態だね。これは具材が偏らずに一様に分布していることも表しているよ。その状態でご飯の位置を言い当てるということは、ご飯の一粒一粒が全ての具材の粒の中でどの位

置にあるのかを言い当てることに他ならない。確率としては最も小さくなる。同様に他の具材についても言い当てられる確率を計算して、情報量の期待値を求めれば、それはまさに情報エントロピーだね！し・か・も、確率が最も小さいということは、情報エントロピーは最大ということ。つまり！

『具材の一粒一粒が一様に分布しているとき、情報エントロピーが最大となる！』

　これを“混ざった”状態と定義する！よって、情報エントロピーが最大になるまでフライパンをぶん回すことで、“混ざった”状態に達することができる！」

　アカネは言い終わると同時にシャープペンシルをノートの上に豪快に叩きつけた。周囲のクラスメイトはアカネの気迫を受け、呆気に取られていた。昂る感情の中にあったが、ノートの説明の図は意外なほど綺麗に描かれている。



チャーハンを混ぜることでエントロピーが大きくなる図

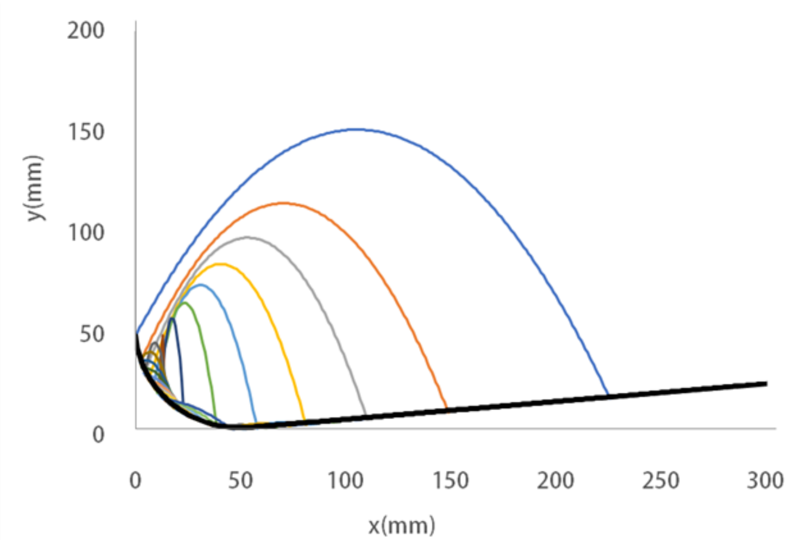
「…す、すごい。すごいよアカネちゃん！まさかほんとうにエントロピーで定義できるなんて…」

「ミキがエントロピーを閃いたから、結果的にうまくいったんだよ。あたしはただその説明を聞いて関連付けただけ……でもやっぱり自慢させて！すごいでしょ！」

　二人は大きな声で笑った。周りのクラスメイトたちは首を傾げたり、つまらなさそうな表情を浮かべながら、それぞれの輪に戻っていった。
「さあ、クライマックスだよ。“混ざった”状態は定義できた。残るは“混ぜる”だ」

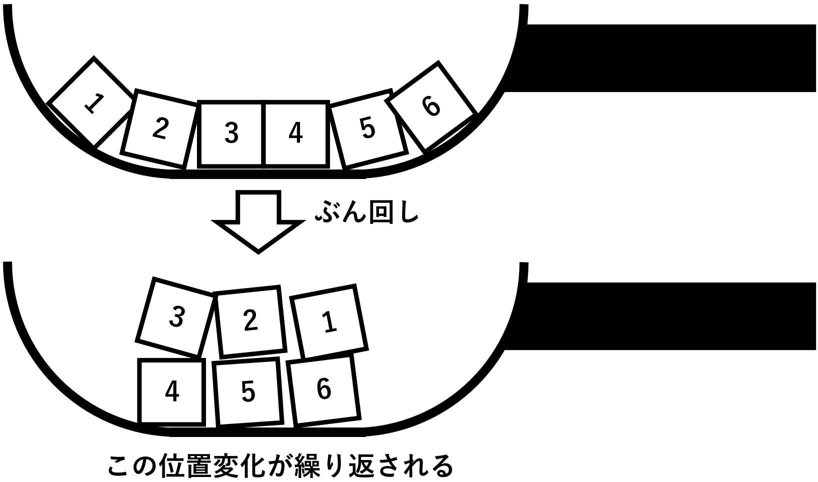
5．“混ぜる”の数理

「フライパンをぶん回すことで各具材の位置関係がどのように変化するか、っていう問題だね」
　と、アカネは言った。
「そうだね。もう一回、具材の軌道を確認してみようよ」
　ミキの提案を受け、アカネは横に置いておいたパソコンを開き、グラフを表示した。



フライパンぶん回しによる具材の軌道

「フライパンの先端にある具材ほど取手のほうに飛んでいってるね」
　と、ミキは眼鏡の奥からグラフを凝視しながら言った。それに対し、アカネはグラフを指で辿りながらこう呟いた。
「なんとなくこの動きを繰り返したら混ざりそうなのはわかるね。そしたら、具材の軌道から着地点を計算して、それぞれの具材の座標がどう変化するかをシミュレートすればいいかな？」
「それも悪くないけど、何か引っかかるなー。わたしたちが知りたいのは具材の厳密な動きではなくて、混ざった状態に近づく過程、つまり、エントロピーが最大値に達するまでの過程だよね。もっと数学的に計算できるんじゃないかな？」
「たしかに」
　二人は、うーん、と唸りながら考えだした。しばらくするとアカネが思い付いて何やらノートに描き始めた。
「最初の状態に番号をふっておく。これを１回ぶん回すことで、こんな感じに位置が変わる。さっきの話を単純化しただけだけど、これなら数学的に扱いやすくなるんじゃない？」



具材の位置変化の簡単な図

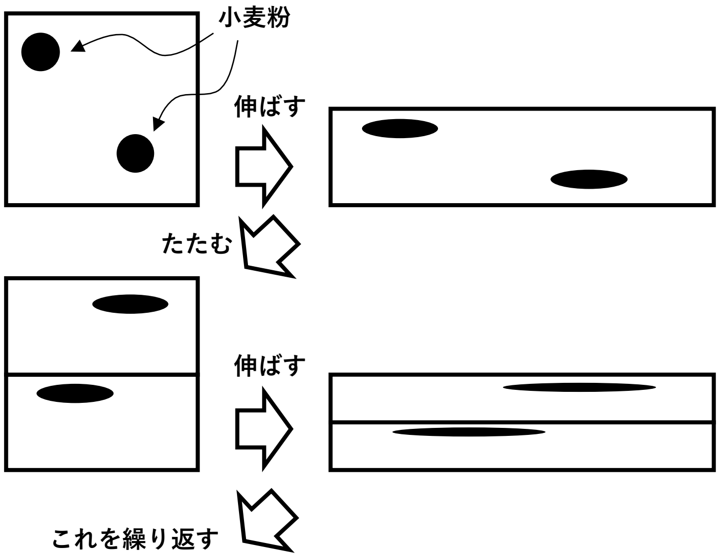
「…アカネちゃん、君ってやっぱり天才かも…これはパイこね変換だよ」
「パイこね？」
「カオス理論の初期値鋭敏性を単純な繰り返し計算で表せるっていうアルゴリズムなんだけど、その中身はそんなに難しくないよ。

まず、長さと厚さが 1 のパイ生地を一つ用意します。生地中の任意の小麦粉の位置を$f(x,y)$で表します。この生地を麺棒で均等に伸ばして、長さを 2 倍に、厚さを 0.5 倍にします。それを半分に折り畳みます。すると、パイ生地は長さと厚さが 1 に戻りますが、$f(x,y)$は最初の位置から移動していますね。これを数式で表すと、

$$f(x,y)=\begin{cases}\left(2x,\dfrac{y}{2}\right) & 0\le x\le 0.5\\ \left(2(1-x),1-\dfrac{y}{2}\right) & 0.5<x\le 1\end{cases}$$

になります。こんなふうにパイ生地を伸ばして折り畳んでを繰り返したときに、位置がどう変換されるかを表したような計算なんだよ」

と言いながらミキはイメージ図をノートに描いてみせた。



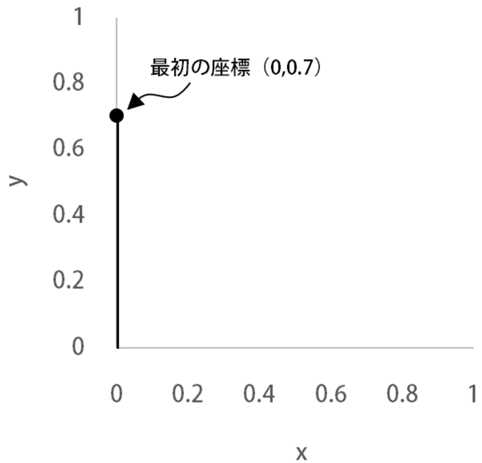
パイこね変換の図

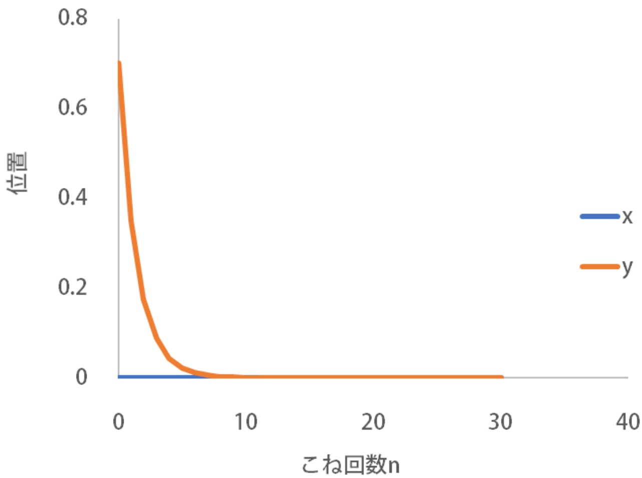
「まったく、ミキの博識には頭が下がるね。ところで初期値鋭敏性ってなーに？」

「実際に計算してみればわかるよ。そうだ！エクセルでグラフにすればもっとわかりやすいよ！」

そう言ってミキはアカネのパソコンに数式を打ち込んだ。あっという間にいくつかのグラフが映し出された。

「x の初期値が 0 のときは、x は動かずに y が 0 に収束していくんだけど、これは式を見れば明らかだよね。同じように、x の初期値が 0.5 と 1 のときも、x が 0 に変換されるから結局(0,0)に収束する。これが最初のグラフだよ」

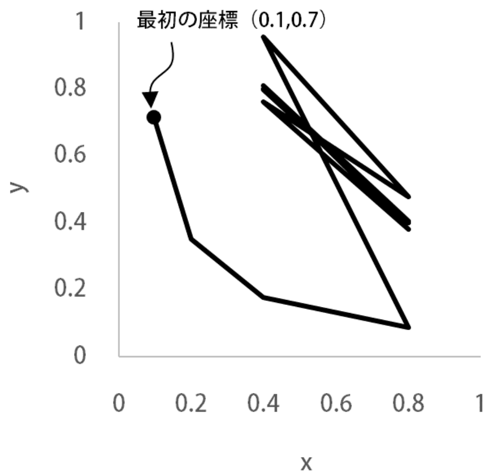


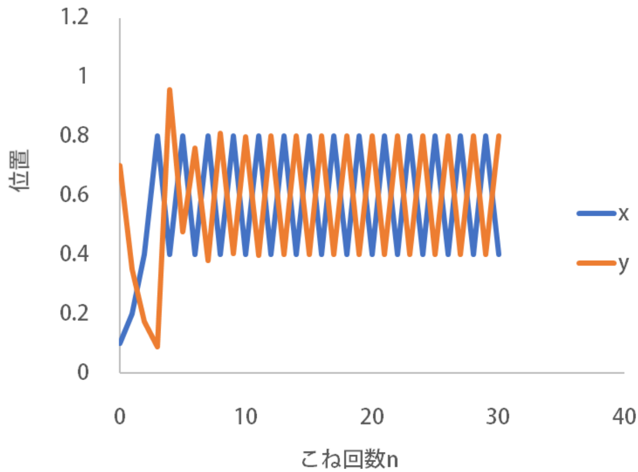


xy 座標の軌跡(上)と xy それぞれの位置変化(下)その 1

「次に x の初期値が 0.1、0.2、0.3、0.4、0.6、0.7、0.8、0.9 のとき。これは結局、x が 0.4 と 0.8 の繰り返しになっちゃう。すると y は、y/2、1-y/2 が交互に繰り返されることになる。そうすると、最終的に y の初期値に関係な

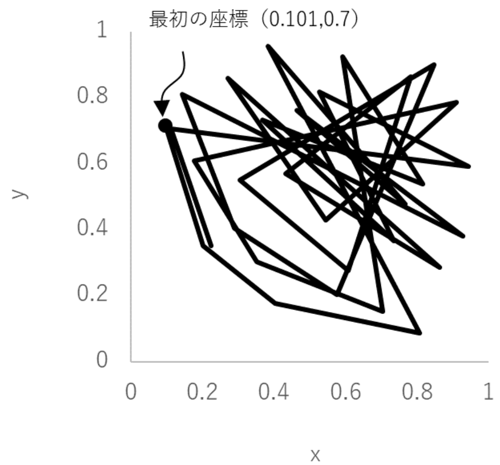
く、0.4 と 0.8 の繰り返しに収束しちゃうの！数学的に確かめられるから後で確認してみてね。つまり、x と y ともに 0.4 と 0.8 の繰り返しになるから 2 点間の移動を繰り返すグラフになるんだよ」

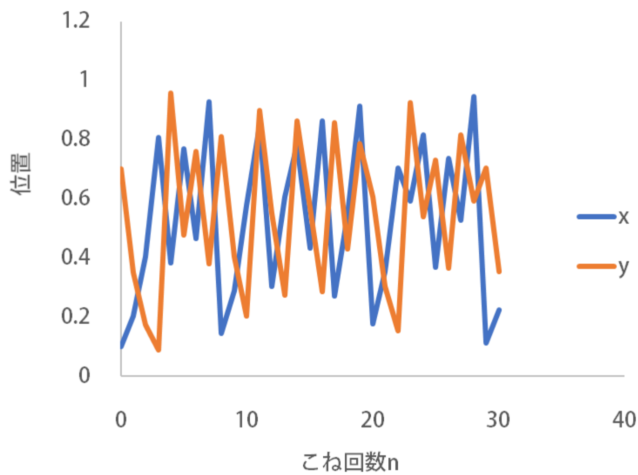




xy 座標の軌跡(上)と xy それぞれの位置変化(下)その 2

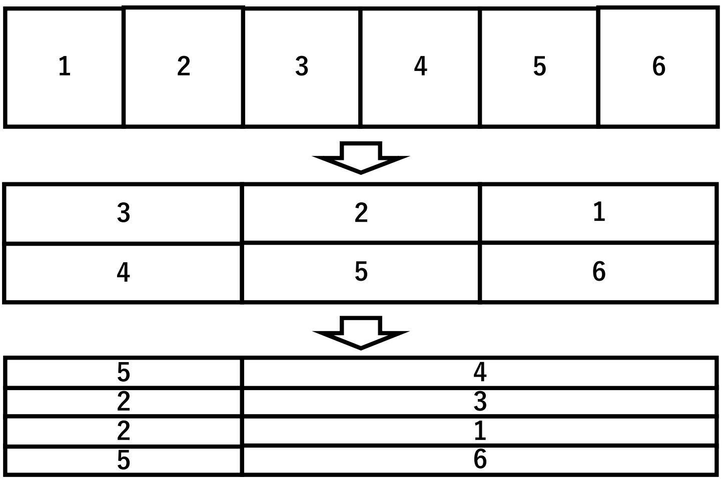
「さて、ここからが本題です。x の初期値を 0.101 にします。たった 0.001、割合でいえば 1%の違いだけど、グラフはこんなに複雑になる。これが初期値鋭敏性。蝶の羽ばたきがやがて嵐に発展するような、ほんのわずかな影響が大きな影響に発展する予測困難な性質を表しているよ」





xy 座標の軌跡(上)と xy それぞれの位置変化(下)その 3

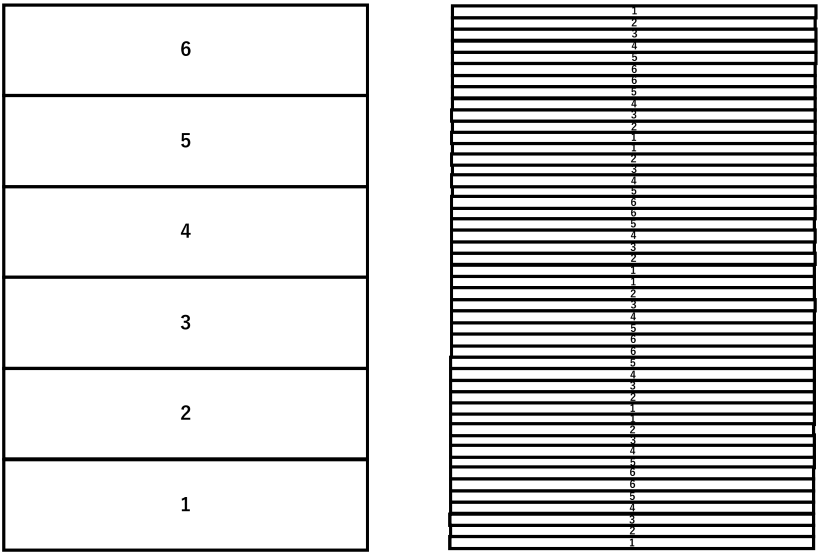
「なるほど。この計算からも、具材の位置がぐるぐる移動して混ざるってことが予想できるね」
「ただし、チャーハンの場合はつぶつぶだから、ちゃんと適用するにはもうちょっと工夫がいるよ」
「あと一歩ってわけだ」
「そう。だから大股開きする用意しといてね。準備運動にさっきのアカネちゃんのモデルでパイこねを進めてみよー」
　ミキはパイこね回数を増やした図を描いた。



パイこね回数を増やした図

　頬杖をつきながらアカネは呟いた。
「ふーん、横の区分がどんどんなくなっちゃうんだね。でもパイこねのモデルを考えれば、当然といえば当然か」
「横の区分がなくなっていくと言うことは、最初から具材が縦に積み重なった形で考えても結果はさほど変わらなさそうだね」

「だね。横に具材を並べる想定だとモデルとしてはちょっと複雑な動きになるから……縦に具材を重ねた状態の想定でやろっか」
「うん、そうしよー」
　ミキはもう一度、具材が縦に積み重なった形でパイこねを繰り返した図を描いた。



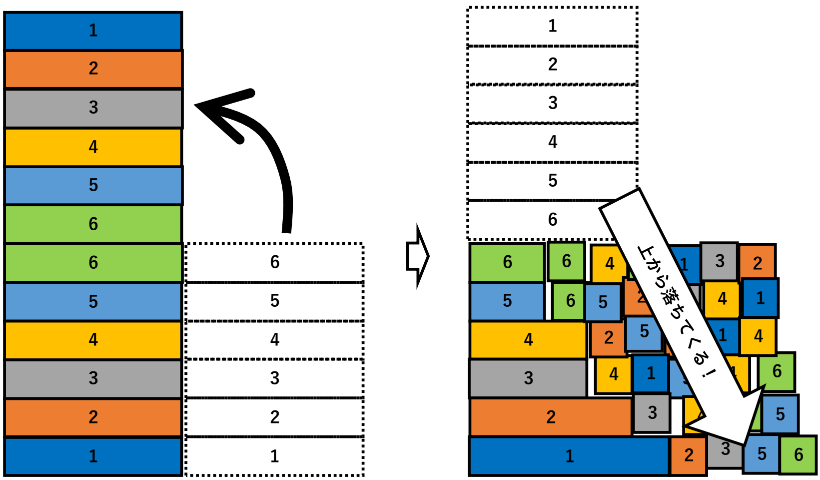
パイこね 0 回(左)と 3 回(下)の図

「うわあ、どんどんどんどん果てしなく薄くなるよー！って待った、そんなわけないじゃん。具材の粒の大きさよりは小さくなりようがないもんね」
　アカネは図に“≧具材の粒”と書き加えた。
「そこなんですよ。エントロピーが最大になるのは具材の一粒一粒にまで分割された状態だから、そこまではパイをこねる必要がある。だけどそうすると具材の層の厚みが粒より薄くなっちゃうの」
「えっ、うそ、だめじゃん。あー、そうか。だから工夫がいるのか」

「その通り。準備運動は終わったから、世紀の大ジャンプ、粒が落ちてくる概念を導入します！」

そう言ってミキは、図になにやら書き加え、説明を始めた。

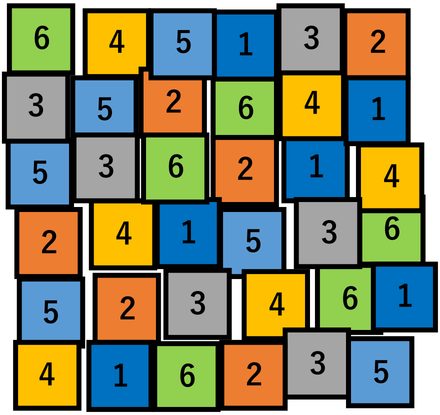
「パイをこねるたびに具材の層は 2 分割されて重ねられます。つまり、最初は 100%の粒が一つの層にありますが、パイをこねると具材の層が二つに分割されて、粒の数は$\frac{1}{2}$ずつに分かれてしまいます。最初の粒の数をL個とすると、分割された一つの層には$\frac{L}{2}$個の粒が分布していることになります。すると、一番下の層は$\frac{L}{2}$個の粒が足りないので、上の層から$\frac{L}{2}$個の粒が落ちてきます。同じように、下から二番目の層も、その上の層も、足りない粒が上の層から落ちてくると考えると、こんな図になります。



足りない分の粒が上から落ちてくるの図

こうすれば層の厚みを変えずに具材の位置の変換ができるんです！具材の区分はどんどん細かくできるし、それに各層の具材の移動する様子を数学的に表現できれば、n回混ぜたときの各層における具材の粒の数の比率が求まるはず！それで、パイこねによって2^n分割された具材の区分が粒の数よりも細かくなり、なおかつ具材の数の比率が均一になったときが、“混ざった状態”

と言えると思うんだ……だって、“混ざった”状態は、“具材の一粒一粒が一様に分布しているとき”だから、具材の区分が一粒一粒に分割されて、なおかつ数の比率が全体で均一になってるなら、それは一様に分布しているといえるよね」



具材の区分が一粒一粒に分割されて、なおかつ数の比率が全体で均一な図

「これだー！これはたしかにK点越え確実の大ジャンプだよ！」
「あはは、もうひと踏ん張りだね。では、各層の名前をレイヤXと呼ぶことにして、各層の最初の粒の数をL_Xとして考えてみよー。ただし、$L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = L_5 = L_6$という条件付きだよ」
「なんで条件を付けるの？」
「粒の数の比率を考えるとき複雑になっちゃうから…変数の多い式になるだろうし…要するにめんどくさいの」
「ならしょうがない」
　二人は向き合って肩をすくめた。さて、と言いながらミキは数式と図を書きながら考察を始めた。
「まず、各層の粒の数が$\frac{1}{2}$になって12層に積み重なるよね。最終的に6層に戻るわけだから、上に追加された6つの層はレイヤ6に加わるものといった

ん考えてみましょう。すると、レイヤ 6 の粒の数は、$\frac{1}{2}L_6+\frac{1}{2}(L_1+L_2+L_3+L_4+L_5+L_6)$になりますね。これを$L'_6$と置きましょう。つまり、

$$L'_6=\frac{1}{2}L_6+\frac{1}{2}(L_1+L_2+L_3+L_4+L_5+L_6)$$

だね」
「まってまって、これは、いちにいさん…粒の数の合計が最初の 3.5 倍になってるよ！」
「そうそう。でもそのうちの 1 だけがレイヤ 6 に残って、あとの 2.5 はレイヤ 5 に落ちちゃうって考えたらどう？つまり、レイヤ 6 は$\frac{1}{3.5}L'_6=\frac{2}{7}L'_6$になって、レイヤ 5 は$\frac{1}{2}L_5+\frac{2.5}{3.5}L'_6=\frac{1}{2}L_5+\frac{5}{7}L'_6=L'_5$になるよー」
「なるほど。これをレイヤ 1 まで繰り返せばいいわけね」
「そういうこと。1 だけ残ってその他は落ちる、を繰り返すと……こうして……こうなって……こう！」

- レイヤ 6：$\frac{2}{7}L'_6=\frac{2}{7}\left\{\frac{1}{2}L_6+\frac{1}{2}(L_1+L_2+L_3+L_4+L_5+L_6)\right\}$
- レイヤ 5：$\frac{1}{3}L'_5=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}L_5+\frac{5}{7}L'_6\right)$
- レイヤ 4：$\frac{2}{5}L'_4=\frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}L_4+\frac{2}{3}L'_5\right)$
- レイヤ 3：$\frac{1}{2}L'_3=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}L_3+\frac{3}{5}L'_4\right)$
- レイヤ 2：$\frac{2}{3}L'_2=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}L_2+\frac{1}{2}L'_3\right)$
- レイヤ 1：$\frac{1}{1}L'_1=\frac{1}{1}\left(\frac{1}{2}L_1+\frac{1}{3}L'_2\right)$
- レイヤ X：$\frac{2}{X+1}L'_X=\frac{2}{X+1}\left(\frac{1}{2}L_X+\frac{X}{X+2}L'_{X+1}\right)=\frac{1}{X+1}L_X+\frac{2X}{(X+1)(X+2)}L'_{X+1}$

「あれ？意外とシンプルにまとまったね」

アカネは感心した様子で式をまじまじと眺めた。

「そうだね。あとはこれをn回繰り返したときに、L_nがどう変化するかを考えるんだけど…」

「えーっと、2 回目の場合は変換された状態の$\frac{2}{X+1}L'_X$がレイヤ X の粒の数になるってことだよね？」

「そういうことだねー」

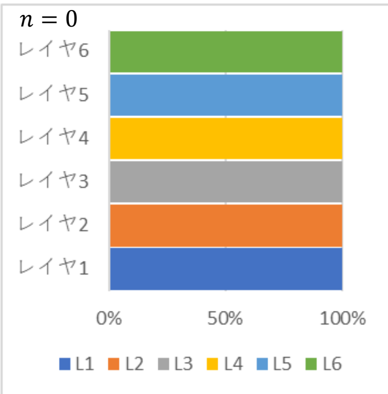
「うーん、ややこしい。これどうやって計算すんの？」

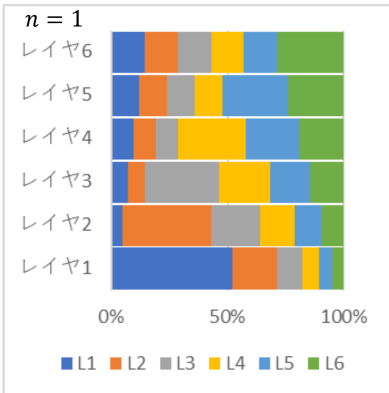
「もちろんパワープレイだよ」

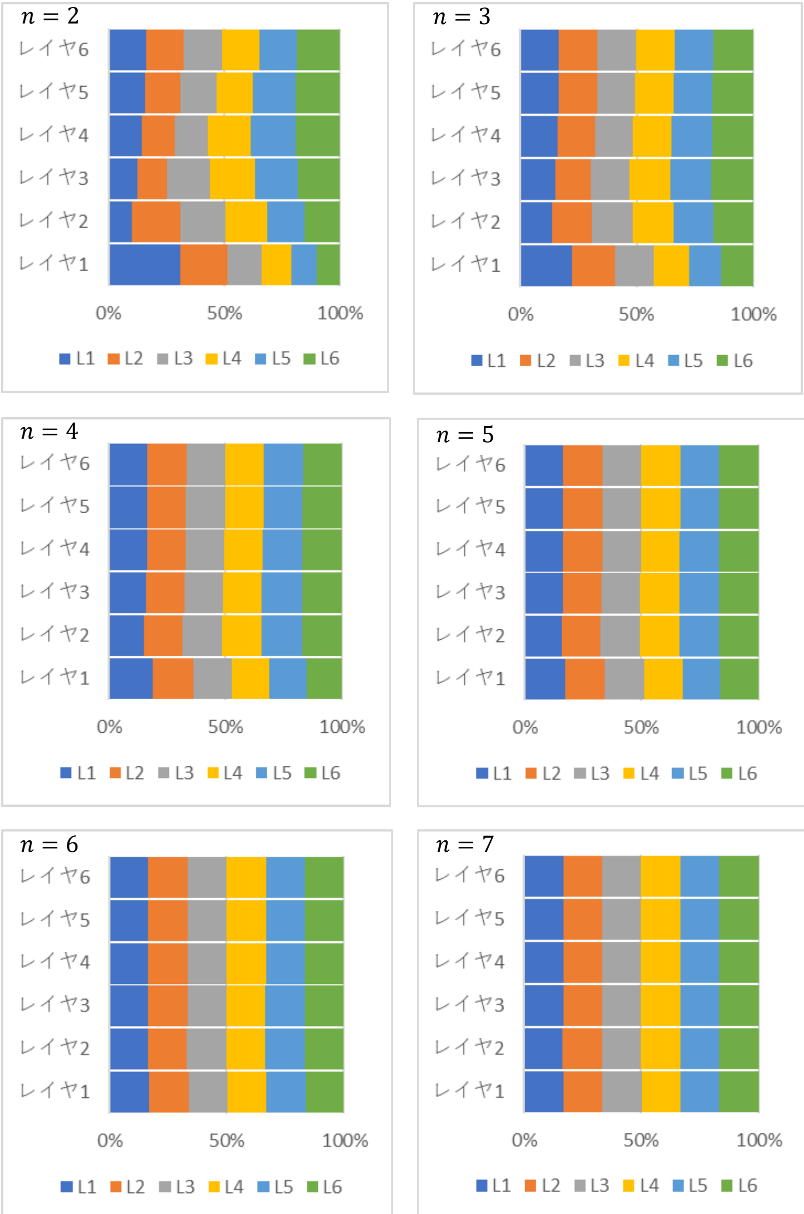
「……力業ってことかな？」

「いえす、エクセルダズ！」

そう言うやいなや、ミキが凄まじいスピードでエクセルに数式を打ち込むと、各混ぜ回数ごとのL_nの比率を表したグラフがすぐに出来上がった。







$\boldsymbol{n}$混ぜたときの各層における$\boldsymbol{L_X}$の比率

「わお！力業ってすごい！」
「でしょ。わたし得意なんだあ、えへへ」
　ミキは腰に両手を当てて胸を張る。
「このグラフを見た感じだと、5回混ぜたくらいから均一になってるね」
　アカネがグラフを指差して言った。
「数値で見ると、だいたい17%ずつになれば均一だから、7回混ぜあたりが妥当かな。あと、$L_X \leq 2^n$になる必要があるから、$n \geq \log_2 L_X$を満たしている回数であればおーけーだよ」
「つまり混ぜ回数nは、$n \geq \log_2 L_X$かつ$n \geq 7$。ただし、L_XはL_1からL_6までで、$L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = L_5 = L_6$が条件ってことだね」
「それと具材がすべて同じ大きさで最初からぱらぱらなことも条件だよー」
「うぅ、リアルとの壁はまだ高そうだね…」
「でもこれでいちおうテーマに対する一通りの答えは用意できたから、ひとまずよしとしましょう。それではわたしたちの健闘に、拍手！」
　パチパチと二人は手を叩き、この記念すべき瞬間に至るまでの努力を称え合った。そうしてミキはニコッと笑顔を見せると、猫を飼い始めた子供のようにはしゃいだ様子でこう言った。
「ねえねえ。ところでこの変換は、もはやパイこね変換じゃないよね。別の名前を付けてあげようと思うんだけど」
「おー、いいね。どんなのがいいかな」
「チャーハン振り混ぜ変換なんてどう？」
「そのまんまだね！でもまあ、わかりやすくていいんじゃない？」
「やったあ！じゃあ、放課後までにチャー混ぜ変換をまとめておくね！」
「え？あ、うん、たのんだ（チャー混ぜ？）」
　こうして二人が結論に達したすぐ後に、午後の授業開始の予鈴が鳴り出した。ゆったりとしていた教室が少しだけ慌ただしくざわめいた。
「放課後またね」
　そう言って、ミキは小さく手を振り自分の席に戻っていった。アカネはエントロピーとパイこね変換を忘れないようにノートを見直し、パソコンとと

もに鞄に仕舞った。しかしなぜか仕舞うことのできないフレーズが頭の中を漂っていた。
（チャー混ぜ？）

6．エピローグ

「ちょっと待ってください！」
　放課後、勉強クラブにてアカネとミキが完成した“チャーハンをこぼさずに混ぜるモデル”について一通り説明し終えたとき、一学年下のメンバーであるトオルがたまらず声を上げた。
「これを昨日の放課後と今日の昼休みに考えて完成させたっていうんですか？」
　アカネとミキは顔を見合わせてきょとんとした後、代表してアカネが言った。
「まあね」
「まあね、ってアカネさん。とんでもないことですよ！とんでもなさすぎてついて行けない…」
　トオルはがくっと肩を落とした。
「大丈夫、大丈夫。トンちゃんも話を聞けてるんだから、あたしらと変わんないって。むしろすごいよ！なんかわかんないけどすごいと思う！」
　アカネはトオルのことをトンちゃんと呼ぶ。由来は不明だが、トオルはそれをとても気に入っているようだ。
「フォローがテキトーだなあ…でもうれしいです。ありがとうございます」
　トオルは渋い顔をしながらもほんのり口元を緩めた。
「そんなことよりも具材が６種類じゃいかんだろ。そんな贅沢なチャーハンはおれの店じゃ売れない」
　具材の種類の数にテツは不満があるようだ。
「じゃあ何種類ならいいの？」
　アカネはテツに問い掛けた。
「えーと、まずご飯、これがなきゃ始まらない。あと卵、ウインナー…」

「ウインナー？」
　アカネは思わず聞き返した。
「え、ウインナーだけど…もしかしてみんなは違うのか？」
「うちは豚肉」
　アカネが言った。
「うちはチャーシューだよ」
　続けてミキが言った。
「うちは……その……ウインナーです…」
　トオルが苦虫を噛み潰したような顔をして言った。
「おい！なんで嫌そうなんだよトオル！一緒でうれしいところだろ、そこは！喜べよばか！」
　テツは激しく抗議した。
「あわわ、すみません！」
　と言って、トオルは目をギュッと閉じた。彼は何かとすぐに謝る癖がある。アカネはめんどくさそうに話の続きを促す。
「それで？ご飯と卵と肉、あとは？」
「あとは……あ！青ネギね。これがあるのと無いので彩りが全然違うから。それと…あと……うーん、そうだ！タケノコね。食感がとんでもなくいいから。バケモノ級なんだから。で、最後に紅ショウガを上にのせれば完成！」
「……あー、いいかも。青ネギ、タケノコ、紅ショウガ……って、けっきょく6種類じゃんかよ！」
　頷きかけた首をぐいっとテツに向け、アカネは指摘した。テツは、はっとして口と目を大きく開いた後、照れたように頭を掻いた。
「よし、全部まとめると、あたしたちの出した結論はこうだね」

・中華鍋のようなできるだけ丸いフライパンを使う。
・①②③の動作で具材を飛び上がらせる。
　A)　①②から③に移行する加速度をフライパン表面の摩擦係数と重力加速度の積よりも大きくする。
　B)　③は遅すぎず速すぎずちょうどいい速度範囲で行う。
・混ぜ回数nは、$n \geq \log_2 L_X$かつ$n \geq 7$。ただし条件あり。

「完璧だ…今すぐにでも中華料理屋を開けるぞ！」
　テツは拳を強く握り締めて言った。
「あのー、ちょっといい？これ言うか迷ってたんだけど…」
　ミキは言いあぐねていたことを話し始めた。
「今回のこれは 2 次元だから、3 次元に拡張しないと適用するのはむずかしいんじゃないかな？あと、中華鍋の振り方って他にもいろいろあって、前後に細かく振ったりおたまと組み合わせたり、チャーハンの工程によって使いわけてるみたい」
「うっ…」
　テツは一瞬たじろいだ。しかしすぐに調子を取り戻してこう返す。
「まあ、でも応用だろ。今回のモデルの応用でいけるいける！」
「モデルは理解できても、制御できる技術がなけりゃ意味がないんだけどね。つまり……やっぱり練習あるのみなんだよね」
　ミキに続いてアカネが本音を打ち明けた。
「わたしなら蓋をしてシャカシャカ振っちゃうかも。そのほうが簡単じゃない？ていうか、実際はプロもけっこうこぼしてるよね。おいしければこぼしてもいーんじゃない？」
　さらにミキが元も子もないことを言い出した。これにはすっかりテツも辟易して、ついにはこう切り出した。
「はーい、中華料理屋やめまーす。代わりにラーメン屋なんてどう？」
「いや、もう飲食店あきらめよ？あんたには無理だって」
「テツくんにはもっと適した仕事があるはずだよ！」
「ぼく味噌ラーメンが好きです」
「話を広げるな！」
　トオルにツッコミが入ったところで、4 人は今回の議論を締め括った。テツ、アカネ、ミキのアイディアを振り混ぜることで、全員の予想だにしない結果が導かれた。くだらなくて、どうでもよくて、とびきり楽しい結果だった。そしてそれを横目に、次はアイディアの一粒を投じてやろうと決意する後輩がいた。たとえ微少な一粒だとしても、その揺らぎでいつか嵐を起こせると信じてみたい。